© *SpazioFilosofico* 2014 – ISSN: 2038-6788

Federica Galluzzi

GEOMETRIA: LA VISIONE MATEMATICA DELLO SPAZIO

Abstract
What does the word "space" mean for a mathematician? What did it mean in the past? This essay takes a brief historical tour and describes some important steps in the evolution of geometry, from Euclid to Gauss and up to the breakthrough of non-Euclidean geometry. Then it explains the fundamental ideas that underlie modern geometry using the privileged viewpoint of Bernhard Riemann, one of the most brilliant mathematical minds ever. Finally, it makes some reference to the challenges that contemporary geometry is facing.

Da sempre l'uomo osserva lo spazio intorno a sé e lo rappresenta, in modo figurativo o simbolico.

La necessità di misurare lo spazio e gli oggetti in esso contenuti si manifesta quando l'uomo inizia a suddividere i terreni di proprietà, a fare commercio, a pagare tributi. La parola greca usata per indicare questa attività è *geometria*, misura della terra, quello che oggi chiameremmo agrimensura.

Le conoscenze geometriche nell'antichità, anche in civiltà avanzate quali la assiro-babilonese o l'egizia, erano disseminate in innumerevoli nozioni di carattere pratico, senza alcuna organizzazione teorica. Gli enti geometrici non erano pensati come astratti, bensì come oggetti materiali, terreni, campi, confini.

Fu Talete di Mileto (VI sec a.C.) che per primo concepì lo studio dello spazio nonché della forma e delle proporzioni degli oggetti come disciplina di carattere speculativo, con valore di universalità.

Formatosi prima in Grecia e poi in Egitto, fu in grado di fondere la sensibilità metafisica propria dei greci con le conoscenze tecniche che gli egizi avevano maturato in campo geometrico.

Talete diede alla geometria basi logiche e razionali, sottolineò l'importanza del metodo e non solo dei risultati, avviò la geometria a diventare una scienza, così come la intendiamo oggi.

L'insegnamento scolastico della geometria muove tutt'ora i suoi primi passi seguendo l'impostazione di Talete e poi di Pitagora (V sec a.C.) ma soprattutto fa riferimento a Euclide (III sec a.C.) e ai suoi *Elementi*.

Gli *Elementi* di Euclide sono il più importante trattato di geometria della storia antica e contengono il quadro completo del sapere geometrico del tempo. Il carattere straordinario dell'opera risiede nel fatto che questo sapere è compreso in un unico sistema deduttivo.

L'impostazione assiomatico-deduttiva che caratterizza la geometria euclidea prevede l'assunzione di elementi detti primitivi (il punto, il piano e la retta) e di postulati o assiomi che si decide di accettare senza ulteriori definizioni o verifiche. I postulati che Euclide propone sono cinque. Citiamo ad esempio il primo:

> «Tra due punti distinti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta»[1].

Gli assiomi sono indipendenti tra di loro (nessuno di essi può essere dimostrato a partire dagli altri) e non contraddittori.

A partire da elementi primitivi e assiomi si dimostrano con il metodo deduttivo tutte le altre proposizioni che vanno a costituire l'intero impianto della geometria euclidea. Al sistema è poi richiesto di essere completo, deve cioè permettere la dimostrazione rigorosa di proprietà verificabili sperimentalmente.

Il primo passo della dimostrazione di una proposizione in geometria euclidea è arte, invenzione. Si disegna, si usano figure e costruzioni geometriche con riga e compasso, si creano sul momento tecniche non esplicitate negli assiomi ma con essi coerenti e da essi deducibili.

L'utilizzo del disegno è cruciale nella geometria greca: i famosi tre problemi di duplicazione del cubo, quadratura del cerchio e trisezione dell'angolo riguardano, appunto, la possibilità di tracciare figure che possiedano esattamente misure assegnate.

All'intuizione iniziale seguono poi deduzioni logiche che portano alla dimostrazione della tesi. Nella stesura finale non c'è traccia della motivazione iniziale, solo gli strumenti di tipo logico sono visti agire sugli oggetti geometrici e sulle loro proprietà, non si usa altro che la logica interna al sistema e non si fa mai riferimento a situazioni reali durante la dimostrazione. Le dimostrazioni peraltro sono molto differenti l'una dall'altra, per ognuna sembra esserci una tecnica *ad hoc*. È il metodo sintetico.

Il lavoro di Euclide fu da subito enormemente apprezzato e questo apprezzamento rimase immutato per secoli. Gli *Elementi* furono la principale opera di riferimento per la geometria fino all'Ottocento. La geometria euclidea era fondamentale nella preparazione di studiosi e intellettuali, filosofi ed artisti, si pensi ad esempio alle applicazioni nello studio della prospettiva.

Fu anche solido fondamento per la filosofia razionalista in quanto esempio non banale di conoscenza a priori, rilevante per le cose esistenti ma non dipendente dalle esperienze che di tali cose abbiamo.

Come definisce Euclide lo spazio? Esso è l'insieme di tutti i punti. Non ha bisogno di altro.

Per molti secoli i matematici hanno studiato la geometria facendo riferimento a questo unico incontestato fondamento: lo spazio euclideo tridimensionale.

[1] EUCLIDE, *Elementi*, Libro I, Postulato I. Gli *Elementi* di Euclide (in inglese) su web: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html, dal sito di David E. Joyce del Dipartimento di Matematica della Clark University.

Nel 1600 tuttavia avvengono importanti mutamenti nella concezione e descrizione dello spazio e degli oggetti. L'impostazione euclidea inizia a mostrare qualche limite, ad esempio nello studio delle traiettorie in meccanica o nella compilazione di mappe. Grazie a Descartes, Fermat e Leibniz, alla geometria euclidea, detta anche sintetica, le cui dimostrazioni procedono tramite figure e deduzioni logiche, si affianca la geometria analitica, che procede per simboli ed equazioni.

Il metodo dimostrativo è completamente differente da quello sintetico, molto più algoritmico. Le dimostrazioni si assomigliano tra di loro, c'è una logica comune. Innanzitutto si riformula il problema assegnando delle lettere ai dati noti, ai dati incogniti e a quelli che si ritiene necessario costruire per esplicitare meglio l'affermazione da dimostrare (ad esempio punti, segmenti o linee rette).

In seguito, senza fare differenza alcuna tra oggetti noti e ignoti (incognite) si traduce il problema in termini algebrici pervenendo a un'equazione. Il problema così impostato si risolve con manipolazioni algebriche esplicitando l'incognita oppure arrivando a un'equazione di cui si conosce già la soluzione. L'algebra è vista come strumento di scoperta. È il metodo analitico.

È qui essenziale l'uso sistematico degli assi coordinati che permettono di rappresentare i punti con coppie o terne di numeri (le coordinate cartesiane) e le relazioni geometriche fra punti con relazioni algebriche.

Si scopre che le equazioni in due incognite descrivono luoghi geometrici. Una linea retta è rappresentata da un'equazione lineare. L'intersezione tra due linee rette si ottiene risolvendo un sistema di due equazioni lineari. Una linea curva è il luogo dei punti che soddisfano una equazione algebrica.

Alcune notazioni che usiamo oggi in geometria derivano direttamente dagli scritti di Descartes. A lui dobbiamo ad esempio l'uso delle ultime lettere dell'alfabeto per indicare le incognite nelle equazioni.

La distanza tra due discipline fino ad allora separate quali la geometria, regno delle figure, e l'aritmetica, regno dei numeri, si assottiglia. Queste scoperte entusiasmano molti scienziati dell'epoca. A questo proposito possiamo citare Lagrange:

> «Finché l'algebra e la geometria procedettero su sentieri separati, il loro progresso fu lento e le loro applicazioni limitate. Ma quando queste scienze si unirono, trassero l'una dall'altra nuova vitalità e da allora in poi procedettero con passo rapido verso la perfezione»[2].

In effetti il metodo elaborato è potente, Descartes ottiene risultati importanti, dimostra ad esempio il famoso Teorema di Pappo.

Leibniz, una generazione dopo, utilizzerà tali intuizioni e una concezione "meccanica" della geometria (variabili come grandezze il cui valore aumenta o diminuisce con continuità) per elaborare uno degli strumenti più efficaci della matematica moderna: il calcolo infinitesimale. Con esso risolve il problema delle tangenti, questione aperta fin dall'antichità, considerandolo nella nuova prospettiva creata da Descartes e Fermat. Più

---

[2] J.L. DE LAGRANGE, *Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École Normale en 1795*, in ID., *Oeuvres completes*, a cura di J.-A. Serret, Gauthier-Villars, Paris 1867ss., vol. VII, p. 271.

che tracciare la tangente a una curva data, egli trova un metodo generale che consente di tracciare la tangente a una curva arbitraria. Questa formulazione è possibile solo nell'ambito della geometria cartesiana, cioè identificando una curva con la sua equazione.

Il carattere di complementarità dei ruoli di questi due metodi è un'acquisizione relativamente recente.

La questione all'epoca andava ben al di là del mero punto di vista metodologico. Da una parte c'erano la geometria e lo spazio come rappresentazioni a priori, fondamento delle intuizioni esterne. Dall'altra una scienza che osservava gli oggetti muoversi nello spazio e traeva da questa osservazione spunti per descriverne le strutture formali.

Questo dualismo tra geometria logica e geometria meccanica o fisica si protrarrà fino a tutto il XIX secolo, inserendosi in un più ampio contesto di dibattito filosofico tra razionalismo ed empirismo.

Per empiristi come Hume la conoscenza consiste di relazioni che la mente pone tra idee:

> «La geometria, ossia l'*arte* con cui stabiliamo le proporzioni delle figure, benché superi di molto in universalità ed esattezza gli slegati giudizi dei sensi e dell'immaginazione, tuttavia non raggiunge mai una precisione perfetta. I suoi primi princípi derivano pur sempre dalla comune apparenza degli oggetti; e questa apparenza, se uno considera la prodigiosa sottigliezza di cui è capace la natura, non può mai fornire la certezza»[3].

Per Kant invece lo spazio «è una rappresentazione necessaria a priori la quale sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne»[4].

I teoremi e i postulati della geometria euclidea sono un esempio canonico di giudizio sintetico a priori, ossia estensivo della conoscenza in quanto il predicato aggiunge qualcosa non compreso nel soggetto. La geometria euclidea viene considerata quindi universale e necessaria, una categoria del pensiero che prescinde dall'esperienza, anzi ne è il presupposto. Solo la rappresentazione di spazio in quanto forma a priori rende possibili le conoscenze sintetiche a priori della geometria. Lo spazio non è una caratteristica esterna del mondo fisico, ma è una caratteristica della mente umana per mezzo della quale le percezioni sensoriali vengono combinate in un sistema ordinato.

Per quanto lontane comunque entrambe le concezioni filosofiche avevano un unico orizzonte di indagine: lo spazio euclideo tridimensionale.

A maggior ragione per i razionalisti. Va da sé che se lo spazio è una rappresentazione universale e necessaria, allora le sue caratteristiche non possono che essere uniche e dunque esso è necessariamente l' insieme dei punti della geometria di Euclide.

Ne consegue che non poteva essere pensata una concezione difforme da questa né poteva costruirsi su di essa un edificio teorico.

---

[3] D. HUME, *A Treatise on Human Nature*, in ID., *Philosophical Works*, a cura di T.H. Green e T.H. Grose, 4 voll., 1882ss., vol. 1, p. 373; trad. it. A. Carlini, E. Lecaldano ed E. Mistretta, Laterza, *Trattato sulla natura umana*, in ID., *Opere filosofiche*, 4 voll., Laterza, Roma-Bari 1987ss., voll. 1, pp. 83-84.

[4] I. KANT, *Kritik der reinen Vernunft*, 2. Auflage (1787), in ID., *Kant's gesammelte Schriften*, a cura della Reale Accademia Prussiana delle Scienze, Akademie-Verlag, Berlin-Leipzig 1900ss., vol. III, p. 52; trad. it. G. Gentile e G. Lombardo-Radice rivista da V. Mathieu, *Critica della ragion pura*, Laterza, Roma-Bari 2010, p. 56.

Per i matematici più audaci del XIX secolo l'accettazione della fondazione a priori della geometria sul concetto di spazio euclideo tridimensionale era problematica. Si discuteva della possibilità di muoversi in spazi diversi da quello euclideo o con un numero maggiore di dimensioni.

Questo è ben documentato ad esempio in Gauss, che in una lettera al suo amico e matematico Friedrich Wilhelm Bessel si esprime in questo modo:

> «Dobbiamo confessare umilmente che, se il numero è soltanto il prodotto del nostro spirito, lo spazio ha invece una realtà anche al di fuori del nostro spirito, realtà della quale non possiamo determinare a priori tutte le leggi»[5].

Oppure anche nel seguente brano, celeberrimo tra i matematici:

> «*In qualche ora libera sono talvolta tornato a riflettere su un altro argomento che per me è già vecchio di quasi quarant'anni; intendo parlare dei primi fondamenti della geometria; non so se Le ho già parlato delle mie idee in proposito. Anche su tale argomento ho ulteriormente consolidato alcuni punti, e la mia convinzione che non sia possibile fondare la geometria in modo interamente a priori è divenuta, se possibile, ancora più salda. Intanto lascerò passare molto tempo prima di decidermi ad elaborare per la pubblicazione le mie assai ampie ricerche sull'argomento, e forse ciò non avverrà mai durante la mia vita, perché temerei le strida dei beoti qualora volessi esprimere compiutamente le mie idee*»[6].

Il punto fondamentale qui è che la geometria analitica sviluppata nello spazio euclideo tridimensionale può essere trasportata *sic et simpliciter* ad un numero arbitrario di dimensioni. Per un matematico di oggi il processo di passaggio a spazi di dimensione superiore non solo è indolore, ma del tutto naturale. Se un punto nello spazio abituale è descritto da tre coordinate, un punto in uno spazio n-dimensionale è descritto da n coordinate. Vale il Teorema di Pitagora n-dimensionale, che permette di calcolare la distanza tra due punti in dimensione qualsiasi. Nella risoluzione di un problema geometrico aumentare il numero di dimensioni significa semplicemente aumentare il numero di incognite nelle equazioni.

Questa naturalità era impensabile però per la maggior parte dei matematici dell'epoca.

C'era poi il famoso problema dell'indipendenza del quinto postulato di Euclide. Euclide consegna alla storia i suoi *Elementi* dimostrando le prime 28 Proposizioni senza mai usare il quinto postulato e anche nel resto dell'opera lo usa pochissimo. I matematici suoi contemporanei e quelli dei secoli successivi si convinsero pertanto che Euclide pensasse di poter degradare quest'ultimo postulato al rango di proposizione facendolo derivare dai quattro precedenti. Per secoli provarono a dimostrarlo, senza successo.

Eccolo allora, il quinto postulato: *se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato di ciascuna retta angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti*.

Possiamo tradurlo in termini più comprensibili: *per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data.*

[5] C.F. GAUSS-F.W. BESSEL, *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Engelmann, Leipzig 1880, p. 497.
[6] *Ibidem*, p. 490.

Osserviamo che ci sono proprietà elementari delle figure geometriche che non è possibile dimostrare senza utilizzare il quinto postulato. Ad esempio che la somma degli angoli interni di un triangolo è l'angolo piatto.

Notiamo anche che nella seconda formulazione perdiamo la caratteristica fondamentale del postulato, quella che lo differenzia in modo sostanziale dai quattro precedenti. Essi infatti possono essere verificati semplicemente con riga e compasso. Invece l'affermazione "prolungando le due rette" può essere compresa dalla nostra mente, ma non verificata. Possiamo figurarci che due segmenti paralleli prolungati indefinitamente da entrambi i lati non si intersechino in alcun punto, ma non possiamo sperimentarlo direttamente.

Oltre a Gauss altri matematici suoi contemporanei osarono pensare l'inimmaginabile: nuovi spazi e nuove geometrie in cui valessero i primi quattro postulati ma non il quinto. In questo modo si sarebbe confutata l'idea di Euclide, si sarebbe dimostrato che il quinto postulato era indipendente dai quattro precedenti.

La filosofia kantiana, dall'alto della sua autorevolezza, negava però la possibilità di elaborare una nuova geometria confutando la verità e l'unicità della geometria euclidea.

Fu anche per questo che quando Bolyai e Lobachevsky (indipendentemente) scoprirono che queste geometrie erano possibili e, diversamente da Gauss, pubblicarono i loro lavori, l'accoglienza della comunità scientifica fu molto fredda, se non sprezzante[7].

Ci volle del tempo affinché le opere di questi precursori venissero diffuse e accettate a tutti i livelli.

Attualmente le geometrie non euclidee esercitano su studenti e appassionati che vi si imbattono per i più svariati motivi il fascino che solo gli scardinamenti rivoluzionari delle certezze secolari possono avere.

Dalla scoperta delle geometrie non euclidee fino a oggi, le concezioni di spazio e di geometria hanno subito una incredibile evoluzione. Vogliamo ora seguire parte di questo cammino con gli occhi di Bernhard Riemann, una delle menti più brillanti dell'Europa del XIX secolo.

Ultimo allievo di Gauss, nella sua celebre tesi di abilitazione *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (1854) difesa di fronte a un pubblico di filosofi e matematici dell'Università di Gottinga, sviluppa delle geometrie alternative a quella euclidea negando il quinto postulato. Geometrie in cui, ad esempio, la somma degli angoli interni di un triangolo non è uguale all'angolo piatto.

Lobacevskij aveva definito la geometria iperbolica, in cui un triangolo ha somma degli angoli interni minore di 180 gradi.

Riemann va ben oltre, egli definisce nozioni di spazio completamente nuove, le varietà differenziali e le varietà riemanniane.

Definiamo le varietà differenziali cercando di seguire l'intuizione riemanniana. Guardiamo la formulazione originaria del quinto postulato. Esso può essere verificato

[7] Bisogna anche precisare che le prime edizioni dei lavori di entrambi ebbero bassa diffusione. Bolyai pubblicò poche pagine come appendice a un libro del padre, anche lui matematico, mentre il primo articolo di Lobachevsky uscì in russo sul bollettino di una piccola università. Ciò non toglie che la comunità non era ancora pronta per questa rivoluzione.

localmente, cioè su piccola scala: prolungando due segmenti paralleli da entrambi i lati aggiungendo segmenti di lunghezza finita essi continueranno a non intersecarsi.

Negli spazi scoperti da Riemann avviene che coppie di segmenti, paralleli al finito, se prolungati all'infinito si intersecano.

Questo significa che globalmente, cioè su larga scala, l'intero spazio può avere caratteristiche estremamente diverse da quelle locali che mostra nelle vicinanze di ogni suo punto.

Non dobbiamo andare molto lontano per trovare un esempio di questo comportamento: la Terra.

Percepiamo piatta la superficie terrestre intorno a noi ma essa globalmente è curva. I meridiani localmente possono essere rappresentati su una carta geografica come rette parallele, ma se prolungati si incontrano ai Poli. È la geometria sferica, qui un triangolo tracciato sulla superficie ha somma degli angoli interni maggiore di 180°.

Tutti i luoghi della Terra possono essere descritti localmente da una carta geografica, cioè da un piano euclideo, ma l'intera superficie è curva (assimilabile a una sfera) e non può certo essere ridotta a un piano.

Ecco, una varietà differenziale (*una grandezza illimitata multiestesa*, direbbe Riemann) è esattamente questo: uno spazio che localmente è euclideo ma che globalmente può assumere le forme più svariate.

Questa definizione è valida in dimensione qualsiasi. Una varietà differenziale n-dimensionale è localmente uno spazio euclideo n-dimensionale.

Il termine "grandezza multiestesa", è da intendersi infatti "avente molteplici dimensioni", da cui il termine molteplicità o varietà.

Lo spazio euclideo tridimensionale per Riemann «costituisce […] soltanto un caso particolare di grandezza triestesa»[8] e il piano quindi un caso particolare di grandezza biestesa. Da ciò «consegue necessariamente che i teoremi della geometria non si possono derivare da concetti generali di grandezza, ma che quelle proprietà, grazie alle quali lo spazio si distingue da altre grandezze triestese pensabili, possono essere tratte soltanto dall'esperienza»[9].

Spieghiamo ora anche il termine "illimitata". Dobbiamo a Riemann infatti anche la distinzione, fondamentale nella matematica moderna e nello studio della geometria globale di uno spazio, tra infinito e illimitato:

> «Bisogna distinguere l'illimitato dall'infinito […]. Che lo spazio sia una varietà tridimensionale triestesa, è un presupposto che trova applicazione in ogni concezione del mondo esterno [...]. L'illimitatezza dello spazio possiede dunque una certezza empirica maggiore di qualsiasi esperienza esterna. Da qui non consegue affatto però l'infinitezza […]»[10].

Pensiamo a un meridiano tracciato su una superficie sferica: è finito (ha lunghezza finita) ma è illimitato, può cioè essere percorso infinite volte senza ostacoli.

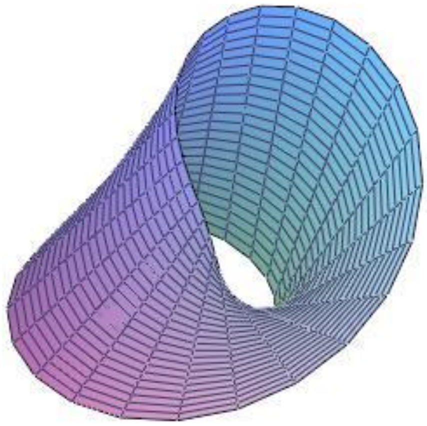
[8] B. RIEMANN, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria* (1854), in ID., *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, trad. it. a cura di R. Pettoello, Bollati Boringhieri, Torino 1994, p. 3.
[9] *Ibidem*, ivi.
[10] *Ibidem*, pp. 17-18.

Una sfera è finita, occupa cioè una porzione finita di spazio, ma è illimitata, in qualunque punto ci si trovi si può sempre tendere la mano e andare oltre, senza ostacoli.

Torniamo all'aspetto locale-globale, concetto cruciale nella geometria riemanniana e contemporanea. Una varietà differenziale ha un aspetto locale, descritto da carte locali (come le carte geografiche della superficie terrestre) e un aspetto globale che il dato locale non vede. L'incollamento di piani euclidei non dà luogo necessariamente a un piano euclideo, come il caso della sfera ben descrive.

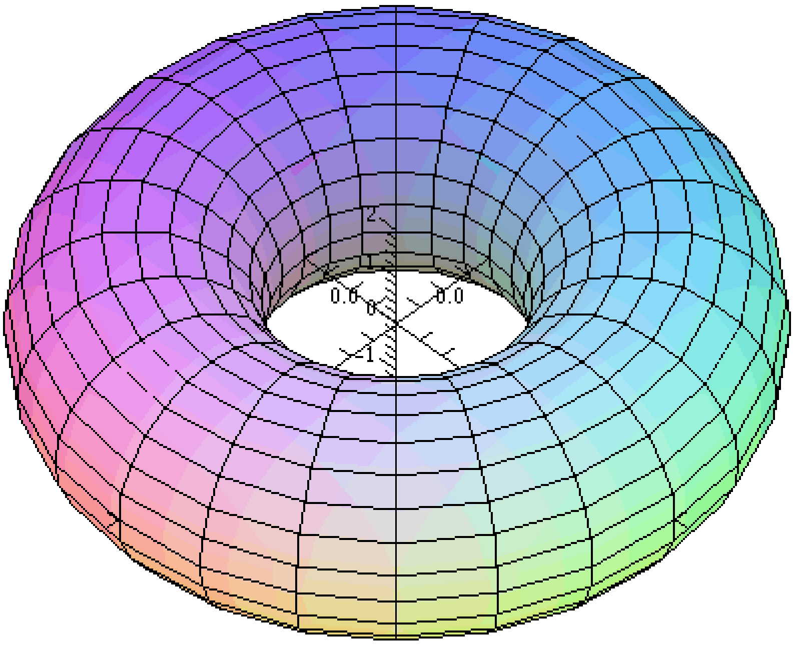
Esistono altri esempi di varietà differenziali che sono totalmente diverse sia dal piano che dalla sfera, pur essendo localmente dei piani euclidei.

Un esempio molto famoso è quello del nastro di Möbius, che localmente è indistinguibile dal piano euclideo (la quadrettatura nell'immagine rappresenta le carte geografiche locali):



Se un uomo inizia a camminare su un nastro di Möbius, una volta completato un giro si ritrova dal lato opposto a quello da cui era partito. Per tornare al punto di partenza deve fare due giri. È il fenomeno che i matematici chiamano "non orientabilità".

Anche quello che i matematici chiamano "toro" (cioè una ciambella) localmente è uno spazio euclideo, globalmente però non lo è affatto, e non è una sfera.



Torniamo alla superficie terrestre, che possiamo pensare come una sfera. Parlando come Riemann diremmo che una sfera è una grandezza illimitata biestesa, in linguaggio moderno diciamo che una sfera è una varietà differenziale di dimensione 2.

Perché 2 e non 3?

Nella risposta a questa domanda c'è l'altra grande rivoluzione nella concezione di spazio che dobbiamo a Riemann: la differenza tra geometria estrinseca e intrinseca.

Una sfera può essere pensata immersa nello spazio euclideo tridimensionale e allora per descrivere i suoi punti sono necessarie 3 coordinate. Se però vivo sulla superficie terrestre, la zona intorno a me può essere riportata su una carta geografica e quindi su un piano: per individuarmi, ovunque io sia, sono necessarie solo due coordinate[11]. Ciò significa che localmente la sfera è un piano euclideo e quindi è una varietà differenziale di dimensione 2. Questa è la geometria intrinseca, la geometria di chi vive su una varietà differenziale.

La geometria euclidea è estrinseca, tutto viene studiato immerso nello spazio ambiente tridimensionale. La geometria contemporanea ha ormai assunto come punto di vista prevalente quello intrinseco.

Questo processo di accettazione della geometria intrinseca ha avuto una spinta decisiva con la formulazione della teoria della relatività generale il cui spazio soggiacente non è euclideo bensì riemanniano di dimensione 4, lo spazio-tempo.

La definizione di varietà riemanniana è concettualmente simile alla precedente (passaggio dal locale al globale) con la differenza però che lo spazio può differenziarsi da quello euclideo già su scala locale, perché le distanze e le lunghezze possono essere misurate in modo diverso. Nella definizione di varietà riemanniana appare per la prima volta il concetto di *curvatura* dello spazio, che è una misura di quanto localmente lo

[11] Qui ci riferiamo come sempre a coordinate cartesiane. Esistono anche altre coordinate per la sfera: la latitudine e la longitudine che sono coordinate curvilinee, gli assi coordinati cioè non sono linee rette ma curve.

spazio considerato si discosta da quello euclideo, che è piatto. Lo spazio euclideo ha curvatura nulla.

Einstein si muove nel mondo della geometria riemanniana utilizzando il concetto di curvatura dello spazio. Il suo contributo è la scoperta fenomenale che la curvatura dello spazio-tempo è determinata dalla massa dei corpi che vi sono immersi.

Forse neanche Riemann si rese conto dell'importanza delle sue ricerche, ma il suo intuito visionario ha portato un contributo fondamentale alla comprensione dello spazio in cui viviamo.

Dal punto di vista concettuale, l'eredità forse più sorprendente della visione riemanniana è l'intuizione che lo spazio non è solo un palcoscenico in cui avvengono le nostre esperienze sensoriali o i fenomeni naturali, ma ne è parte attiva, li permea e ne condiziona lo svolgimento.

Pensiamo al clima sulla Terra. La sua forma sferica non permette ai venti di soffiare tutti ovunque nella stessa direzione, ad esempio verso est. A un certo punto, ai Poli, il movimento si blocca. Se vivessimo su un toro invece sarebbe possibile.

È la caratteristica che i matematici chiamano "non pettinabilità" della sfera. Non è possibile pettinare una palla portando i capelli tutti nella stessa direzione, a un certo punto si crea un vortice o una riga. Il toro al contrario è pettinabile. E questo è solo uno dei tanti esempi possibili. La geometria dello spazio ambiente influenza i fenomeni che avvengono al suo interno.

La concezione geometrica riemanniana ci aiuta quindi a indagare lo spazio intorno a noi e quello globale, incommensurabilmente grande.

Che cosa possiamo dire invece, sempre con Riemann, quando «si estendono [le] determinazioni empiriche oltre i limiti dell'osservazione, […] nell'incommensurabilmente piccolo»[12]?

> «Ora, sembra […] che i concetti empirici sui quali si fondano le determinazioni metriche spaziali, il concetto di corpo e di raggio luminoso, cessino di avere validità nell'infinitamente piccolo; è dunque certamente pensabile che nell'infinitamente piccolo le relazioni metriche dello spazio non si accordino con i postulati della geometria; ammissione questa che si renderebbe di fatto necessaria, se permettesse di spiegare in modo più semplice i fenomeni»[13].

Queste considerazioni sono quasi profetiche se pensiamo allo sviluppo della fisica nel XX secolo. Sappiamo che la meccanica quantistica introduce un'indeterminazione fondamentale (spaziale e temporale) nella descrizione fisica delle particelle elementari alle scale atomica e subatomica. È infatti impossibile conoscere simultaneamente e con precisione posizione e velocità di tali particelle nello spazio.

Quello che si può studiare è l'interazione tra varie particelle e questa dipende in modo sostanziale dalla geometria dello spazio ambiente e dalle sue simmetrie. Come sembrava prevedere Riemann, però, uno dei grandi problemi della fisica contemporanea è che la relatività generale e lo spazio-tempo non sono così facilmente inseribili nel cosiddetto modello standard che descrive le interazioni fondamentali tra le particelle a livello subatomico. La forza di gravità è proporzionale alla massa e quindi a questa scala è

[12] B. RIEMANN, *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, ed. cit., p. 17.
[13] *Ibidem*, p. 19.

trascurabile rispetto alle altre forze in campo: le interazioni elettromagnetica, debole e forte, le cui azioni il modello standard descrive efficacemente.

Il tentativo di armonizzare teoria della relatività generale e meccanica quantistica con modello standard non è ancora riuscito.

Altri spazi, altre varietà sono state definite per tentare di risolvere questo problema. Altre dimensioni sono state aggiunte allo spazio-tempo quadridimensionale, dimensioni spaziali, che risulterebbero ripiegate su se stesse e forzate dalla geometria dello spazio in cui sono immerse e quindi a noi nascoste[14].

L’enorme sforzo teorico della geometria e della fisica contemporanee di unificare i due modelli descrittivi ha portato finora qualche avanzamento parziale, anche significativo, ma non risolutivo.

Il che significa che per fisici e matematici c’è ancora parecchio da fare (e da divertirsi) poggiando sulle spalle dei giganti che ci hanno preceduto e sulle eredità straordinarie che ci hanno lasciato.

[14] Per approfondimenti si veda S.T. YAU-S. NADIS, *La forma dello spazio profondo. La teoria delle stringhe e la geometria delle dimensioni nascoste dell’universo*, trad. it. C. Piga, Il Saggiatore, Milano 2011.